Arithmétique ordinale et cardinale et hiérarchies sur les ensembles

Nicolas Berger

Sous la direction de

Professeur Jacques Duparc
Assistant responsable Alessandro Facchini

automne 2009

Résumé

Ce projet présente les définitions des nombre ordinaux et cardinaux dans le cadre de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Il développe ensuite les arithmétiques associées à ces nombres.

Table des matières

1 Introduction

Les concepts de nombres ordinaux et cardinaux ont été introduits par Georg Cantor à la fin du XIXe siècle. L'opposition ordinal/cardinal tire sa source dans la linguistique où l'adjectif cardinal (un, deux, trois, ...) donne le nombre d'éléments d'un ensemble, alors que l'adjectif ordinal (premier, deuxième, troisième, ...) se réfère à la position d'un élément dans un ensemble. L'adjectif ordinal suppose donc une relation d'ordre sur l'ensemble considéré, qui donne des positions aux éléments. Cantor généralisa cette approche et définit de façon générale les nombres ordinaux et cardinaux. Ces nombres sont des entités ensemblistes qui permettent au mathématicien de compter les éléments d'ensembles. Les définitions de Cantor ne s'arrêtaient pas aux ensembles finis. Leur originalité était de traiter également les ensembles possédant une infinité d'éléments. Ils permirent notamment à Cantor de prouver qu'il existe des hiérarchies dans les ensembles infinis, certains sont plus grands que d'autres. En fait, il montra qu'il en existe une infinité de sortes, ce qui exhiba toute la complexité de ces ensembles infinis ! Il est aisé de construire des ensembles finis, mais considérer des ensembles contenant une infinité d'éléments était sujet à controverse à cette époque. A ce propos, les travaux de Cantor connurent de nombreux détracteurs. Un de ceux-ci, Kronecker, considéré comme un des précurseur du constructivisme dit : « Dieu a créé les nombres entiers ; le reste est l'oeuvre de l'homme ». La légende dit que ces attaques firent tomber Cantor dans des accès de dépressions. Il reçut également des soutiens parmi lesquel on peut citer David Hilbert et sa célèbre réplique : « Nul ne doit nous exclure du Paradis que Cantor a créé ».

Ce projet présente les définitions des nombres ordinaux et cardinaux dans le cadre de la théorie actuelle des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Une arithmétique leur est ensuite associée.

2 Théorie des ensembles

Dans ce chapitre, nous allons préciser dans quelle théorie nous nous plaçons pour parler de nombres ordinaux et cardinaux. Cette théorie est la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel munie de l'axiome du choix. Nous notons en conséquence cette théorie ZFC.

Cette théorie se fonde sur un langage du premier ordre ne possédant que la relation binaire $\in$. Si $x \in y$ on dit que x est un élément de y. Les existants sont appelés les ensembles.

Voici les axiomes qui la forment.

2.1 Axiomes

Axiome 0 (Existence d'ensemble)

$$\exists x(x = x).$$

Cet axiome nous assure qu'il existe un ensemble. Cette formule peut être prouvée sans hypothèse en déduction naturelle. Nous la mettons dans notre liste d'axiomes juste pour la mentionner.

Axiome 1 (Extensionnalité)

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

Si x et y ont exactement les mêmes éléments, alors ils sont égaux.

Axiome 2 (Schéma de Compréhension)
Pour toute formule ϕ dont les variables libres sont parmi x, z, p, la formule suivante est un axiome :

$$\forall z \forall p \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi).$$

Remarquons que pour ϕ, z et p donné, l'unicité de y tel que $\forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi)$ se déduit de l'axiome d'extensionnalité. En effet, s'il existe y et y' tels que $\forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi)$ et $\forall x(x \in y' \leftrightarrow x \in z \wedge \phi)$, on en déduit $\forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi \leftrightarrow x \in y')$. Donc par l'axiome d'extensionnalité $y = y'$, ce qui termine la preuve de l'unicité.

Pour ϕ, z et p donné, nous écrivons y de la manière suivante :

$$y = \{x \in z : \phi\}.$$

Par exemple, comme il existe un ensemble x selon l'axiome 0, on définit l'ensemble vide par

$$\varnothing = \{x \in z : x \neq x\}.$$

Nous avons donc que $\varnothing$ est un ensemble qui n'a aucun élément. Par extensionnalité, c'est l'unique ensemble à avoir cette propriété.

Axiome 3 (Paire)

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z).$$

Pour tout x et y, par l'axiome de la paire, il existe z tel que $(x \in z \wedge y \in z)$. On note alors $\{x, y\}$ l'ensemble $\{w \in z : w = x \vee w = y\}$. Si $x = y$ on note simplement $\{x, y\} = \{x\}$.

De même on définit le couple (x, y) par $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. On vérifie simplement que pour tout x, y, x', y', on a $(x, y) = (x', y') \rightarrow x = x' \wedge y = y'$.

Axiome 4 (Union)

$$\forall x \exists w \forall y \forall z (z \in y \wedge y \in x \rightarrow z \in w).$$

Pour tout x, il existe w qui contient les éléments des éléments de x. On note alors $\bigcup x$ l'ensemble $\{z \in w : \exists y (z \in y \wedge y \in x)\}$. C'est l'unique ensemble tel que $\forall z (z \in \bigcup x \leftrightarrow \exists y (z \in y \wedge y \in x))$.

De plus, on définit l'union de deux ensembles x et y par $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$.

Axiome 5 (Schéma de Remplacement)
Pour toute formule ϕ dont les variables libres sont parmi A, x, y, p, la formule suivante est un axiome :

$$\forall p \forall t [(\forall x \in t \exists ! y (\phi)) \rightarrow (\exists s \forall x \in t \exists y \in s (\phi))]$$

La notation $\exists ! x(\phi)$ qui signifie $\exists x[\phi \wedge \forall y(\phi_{[y/x]} \rightarrow y = x)]$ (il existe un unique x tel que ϕ), où $\phi_{[y/x]}$ est la formule ϕ où toutes les occurences libres de x sont remplacées par y.

Informellement, ce schéma d'axiomes nous permet de construire à partir de s un nouvel ensemble t selon une règle ϕ qui "remplace" les éléments de s par des éléments de t.

Axiome 6 (Parties)

$$\forall x \exists p \forall y (y \in p \leftrightarrow y \subset x).$$

Donc pour tout x il existe un ensemble p contenant exactement tous les sous-ensembles de x. Par extensionnalité, p est unique à avoir cette propriété. On note alors cet ensemble $\mathcal{P}(x)$.

Nous pouvons maintenant construire facilement à partir de deux ensembles s et t un ensemble noté $s \times t$ tel que

$$\forall z(z \in s \times t \leftrightarrow \exists x \in s, \exists y \in t, z = (x, y)).$$

En effet, on remarque que $\forall x \in s, \forall y \in t, (x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(s \cup t))$. Ainsi, en posant $s \times t = \{(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(s \cup t)) : x \in s \wedge y \in t\}$, on obtient l'ensemble recherché.

Axiome 7 (Infini)

$$\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

Nous verrons dans le chapitre 3 que cet axiome permet de créer un ensemble contenant une infinité d'éléments. Nous verrons également ce que infinité signifie.

Axiome 8 (Fondation)

$$\forall x(\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y))).$$

Tout x, s'il est non vide, possède un élément avec qui son intersection est nulle.

Nous n'utiliserons pas l'axiome de fondation tout au long de notre construction des nombres ordinaux et cardinaux. En effet, cela nous permettra dans le chapitre 4 de parler d'ordinaux dans des théories sans cet axiome.

Axiome 9 (Choix)

$$\forall x[(\forall y \in x(y \neq \varnothing)) \rightarrow (\exists c \forall y \in x \exists! z(z \in y \cap c))].$$

Dans le chapitre 5 nous verrons un théorème équivalent à l'axiome du choix sous les axiomes 1 à 8.

2.2 Fonctions

Définition 2.1
*Soit A, B des ensembles. Soit $f \in A \times B$. On dit que f est une **fonction** de A à B et on note $f : A \rightarrow B$ si :*

$$\forall x \in A, \exists! y \in B, (x, y) \in f.$$

Pour tout $x \in A$, on note alors $f(x)$ l'unique élément de B tel que $(x, f(x)) \in f$.

Définition 2.2
*Soit A un ensemble. La fonction **identitée** sur A notée id_A est la fonction $id_A = \{(a,a) \in A \times A : a \in A\}$. On vérifie facilement que c'est bien une fonction.*

Définition 2.3
*Soit A, B des ensembles, $f : A \to B$. On dit que f est une **surjection** ou **surjective** si :*

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x).$$

Définition 2.4
*Soit A, B des ensembles, $f : A \to B$. On dit que f est une **injection** ou **injective** si :*

$$\forall x \in A, \forall x' \in A, f(x) = f(x') \to x = x'.$$

Définition 2.5
*Soit A, B des ensembles, $f : A \to B$. Soit $C \subset A$. On appelle **restriction** de f à C, noté $f|_C$, l'ensemble*

$$f|_C = \{(a,b) \in f : a \in C\}.$$

On remarque que $f|_C$ est une fonction de C à B.

Définition 2.6
*Soit A, B, C des ensembles, $f : A \to B$ et $g : B \to C$. On appelle **composition** de f et g, noté $f \circ g$, l'ensemble*

$$f \circ g = \{(a,c)A \times C : c = f(g(a))\}.$$

On remarque que $f \circ g$ est une fonction de A à C.

Proposition 2.7
Soit A, B des ensembles, $f : A \to B$ et $g : B \to A$. Si $g \circ f = id_A$ alors g est une surjection et f une injection.

Démonstration. Nous allons montrer que g est une surjection. Pour tout $a \in A$ on a $g \circ f(a) = id_A(a) = a$. Ainsi on a trouvé $b = f(a) \in B$ tel que $g(b) = a$.

Il reste à montrer que f est une injection. Soit $a, a' \in A$. Supposons $f(a) = f(a')$. Alors on a aussi $g(f(a)) = g(f(a'))$. Or $g(f(a)) = g \circ f(a) = id_A(a) = a$, de même $g(f(a')) = a'$. On a donc fini de montrer $a = a'$. $\square$

Définition 2.8
Soit A, B des ensembles, $f : A \to B$ est dite ***inversible*** *s'il existe $gB \to A$ tel que $g \circ f = id_A$ et $f \circ g = id_B$. Un tel g est en conséquence unique et on le note f^{-1}.*

Proposition 2.9
Soit A, B des ensembles, et $f : A \to B$. La fonction f est inversible si et seulement si elle est bijective.

Démonstration. Supposons f inversible. Alors on a $f^{-1} \circ f = id_A$ et on en déduit que f est une injection. De même $f \circ f^{-1} = id_B$ et ainsi f est une surjection. Ainsi on a montré que f est bijective.

Supposons maintenant que f soit bijective, et montrons que f est inversible. Posons $f^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$. On vérifie sans difficulté que f^{-1} est une fonction, que $f^{-1} \circ f = id_A$ et que $f \circ f^{-1} = id_B$. □

2.3 Classes

Nous pouvons nous poser la question si nous pouvons construire, pour n'importe quelle formule ϕ de variable libre x un ensemble qui contient tout les x tel que ϕ est vrai. On noterai en conséquence cet ensemble $\{x : \phi\}$. Si nous admettons cela, on peut en particulier construire $V = \{x : x = x\}$, qui serait l'ensemble de tous les ensembles. Or, on en déduit une contradiction due au mathématicien Bertrand Russell. En effet posons $A = \{x \in V : x \notin x\}$. Comme $A \in V$, si $A \notin A$ alors on a $A \in A$ par construction de A. De même si $A \in A$ alors A satisfait $A \notin A$. D'où une contradiction, nous ne pouvons pas construire V l'ensemble de tous les ensembles. Etant donné une formule ϕ, il peut être utile pour des raisons de notation d'écrire $x \in \{x : \phi\}$ pour dire que x satisfait ϕ.

Définition 2.10
Une ***classe*** *$\boldsymbol{C} = \{x : \phi(x)\}$ est la donnée d'une formule ϕ ayant comme variable libre x.*

Définition 2.11
Pour les classes $\boldsymbol{C} = \{x : \phi(x)\}$, $\boldsymbol{D} = \{x : \psi(x)\}$, les formules suivantes sont des abréviations :
- *$x \in \boldsymbol{C}$ signifie $\phi(x)$*
- *$\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{D}$ signifie $\forall x(\phi(x) \to \psi(x))$*
- *$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ signifie $\forall x(\phi(x) \leftrightarrow \psi(x))$*

On peut aussi noter les classes suivantes :
- *$\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D}$ est la classe donnée par $\{x : \phi(x) \wedge \psi(x)\}$*

– $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}$ *est la classe donnée par* $\{x : \phi(x) \vee \psi(x)\}$
– $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$ *est la classe donnée par* $\{(x, y) : \phi(x) \wedge \psi(y)\}$

On dit qu'une classe $\mathbf{C}$ est un ensemble s'il existe un ensemble c avec $\mathbf{C} = \{x : x \in c\}$. Cependant on peut trouver des classes qui ne sont pas des ensembles, comme par exemple $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$. On dit alors que $\mathbf{V}$ est une classe propre.

Lorsque $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont des ensembles, les abbréviations $\in, \subset, =, ...$ correspondent bien aux notions usuelles des signes sur les ensembles.

Définition 2.12
Si $\boldsymbol{C}$ *et* $\boldsymbol{D}$ *sont des classes, une classe* $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$ *est appellée* ***classe fonctionnelle*** *notée* $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ *si elle satisfait :*

$$\forall x \in \boldsymbol{C} \quad \exists! y \in \boldsymbol{D} \text{ tel que } (x, y) \in \boldsymbol{F}$$

On note $y = \boldsymbol{F}(x)$ *l'unique* y *tel que* $(x, y) \in \boldsymbol{F}$.

Dans ce projet, notre utilisation des classes n'est là que pour pouvoir utiliser des abréviations, nous ne modifions en rien la théorie ZFC pour prendre en compte les classes. Ainsi toute formule utilisant les symboles des classes est l'abréviation d'une formule sans de tels symboles. Pour le lecteur qui veut aller plus loin avec l'utilisation des classes, il existe des théories qui prennent en compte à la fois les classes et les ensembles comme des existants, par exemple la théorie des ensembles de von Neumann–Bernays–Gödel (NBG).

3 Nombres ordinaux

3.1 Bons ordres

Dans ce chapitre, nous nous proposons de compter les éléments d'un ensemble E de façon ordinale. Dire : «cet élément est le premier, celui-ci le deuxième, etc.» revient formellement à donner un ordre à E. Ici nous nous intéressons donc aux ensembles munis d'un ordre particulier, que nous appelons un bon ordre.

Définition 3.1
*Un **ordre strict** est un couple d'ensembles (E, R) tel que pour tout $x, y, z \in E$:*
- *$(x, x) \notin R$ (Irréflexivité) ;*
- *$(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R$ (Antisymétrie) ;*
- *$((x, y) \in R \wedge (y, z) \in <) \rightarrow (x, z) \in R$ (Transitivité).*

L'ensemble R est souvent noté $<$, et si $(x, y) \in <$ on note simplement $x < y$.

Remarque 3.2
Si $(E, <)$ est un ordre strict, alors pour tout $F \subset E$, le couple $(F, <)$ est également un ordre strict.

Définition 3.3
*Un ordre strict $(E, <)$ est dit un **ordre total** sur E si pour tout $x, y \in E$,*

$$x \neq y \rightarrow x < y \vee y < x.$$

*On dit aussi que E est **totalement ordonné** par $<$.*

Définition 3.4
*Soit $(E, <)$ un ordre total. Pour tout $x, y \in E$, on définit alors le **maximum** de $\{x, y\}$ par :*

$$max(x, y) = \begin{cases} x & si\ x < y \\ y & si\ y < x \\ x & si\ x = y \end{cases}$$

Définition 3.5
*Soit $(E, <)$ un ordre strict. Soit $x \in E$, on dit que x est un **élément minimal** si*

$$\forall y \in E (x = y \vee x < y).$$

Définition 3.6
*Un ordre strict $(E, <)$ est appellé un **bon ordre** si pour tout sous-ensemble non vide $F \subset E$, l'ordre strict $(F, <)$ admet un élément minimal. On dit aussi que E est **bien ordonné** par $<$.*

Proposition 3.7
Soit E un ensemble bien ordonné par $<$. Alors E est totalement ordonné par $<$.

Démonstration. Pour tout $x, y \in E$, avec $x \neq y$, on va montrer $x < y$ ou $y < x$. Considérons l'ensemble $\{x, y\} \subset E$. Par le bon ordre de E, il existe z un élément minimal à $\{x, y\}$. Ainsi soit $z = x$ et ainsi $x < y$, ou alors $z = y$ et $y < x$. Donc dans tous les cas nous avons $x < y$ ou $y < x$, d'où la proposition. □

Définition 3.8
Soit E un ensemble bien ordonné par $<$. Pour $x \in E$ ***l'ensemble des prédécesseurs*** *de x est $E_x = \{y \in E : y < x\}$.*

Définition 3.9
Un ***homomorphisme*** *f entre deux bons ordres $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$ est une fonction $f : E \to F$ telle que pour tout $x, y \in E$ si $x <_E y$ alors $f(x) <_F f(y)$.*

Définition 3.10
Un ***isomorphisme*** *f entre deux bons ordres $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$ est une bijection $f : E \to F$ telle que f est un homomorphisme entre $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$ et f^{-1} est un homomorphisme entre $(F, <_F)$ et $(E, <_E)$. S'il existe un tel isomorphisme, on dit alors que $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$ sont* ***isomorphes*** *et on le note $(E, <_E) \cong (F, <_F)$.*

Proposition 3.11
Soit $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$ des bons ordres. Soit de plus f un homomorphisme entre $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$. Si f est surjectif dans F, alors c'est un isomorphisme entre $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que f est une bijection entre E et F. La surjectivité de f dans F est donnée par hypothèse. Montrons l'injectivité. Pour tout $x, y \in E$, si $x \neq y$ alors comme l'ordre $<_E$ est un ordre strict sur E, on a soit $x <_E y$ soit $y <_E x$. Ainsi soit $f(x) <_F f(y)$ soit $f(y) <_F f(x)$. Dans tous les cas, on a $f(x) \neq f(y)$, d'où l'injectivité de f.

Il reste à montrer que f^{-1} est un homomorphisme. Or pour tout $u, v \in F$ avec $u <_F v$, comme $<_E$ est un ordre total, on est dans l'un des trois cas suivants :

- $f^{-1}(u) = f^{-1}(v)$
- $f^{-1}(v) <_E f^{-1}(u)$
- $f^{-1}(u) <_E f^{-1}(v)$

Le premier cas est absurde car il implique que $u = f(f^{-1}(u)) = f(f^{-1}(v)) = v$. De même le deuxième cas est absurde car il implique que $v <_F u$. Nous sommes donc dans le troisième cas, on a fini de montrer que f est un isomorphisme. $\square$

Donner un bon ordre à un ensemble E nous permettra donc en quelque sorte de compter ses éléments. Deux ensembles peuvent être bien ordonnés de façon similaire, d'où la notion d'isomorphisme entre ces ensembles. Il peut être utile de créer le plus explicitement possible un représentant pour chaque classe d'isomorphisme (i.e. chaque type de bon ordre que l'on peut construire sur un ensemble). Cela motive la définition du nombre ordinal.

3.2 Nombres ordinaux

Définition 3.12
Un ensemble E est dit ***transitif*** *si pour tout $x \in E$, on a $x \subset E$.*

Définition 3.13
Un ensemble α est appellé ***ordinal*** *ou* ***nombre ordinal*** *s'il est transitif et si la relation d'appartenance forme un bon ordre sur α.*
Formellement, la relation d'appartenance est $R_\in = \{(a, b) \in \alpha \times \alpha : a \in b\}$.

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons les lettres grecques pour dénoter des nombres ordinaux.

Exemple 3.14
Les ensembles $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, ... sont des ordinaux. On les note :
- $0 = \varnothing$
- $1 = \{0\} = \{\varnothing\}$
- $2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $3 = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
- ...

Par contre, l'ensemble $\{0, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ n'est pas un nombre ordinal, car il n'est pas transitif.

Dans la suite de ce travail, pour α un ordinal, lorsque nous considérons α muni de son bon ordre $R_\in$, nous écrivons simplement α à la place de $(\alpha, R_\in)$, et nous appelons son ordre $R_\in$ simplement $\in$.

Voici quelques propriétés pour mieux comprendre des nombres ordinaux. Nous montrerons plus tard qu'à chaque bon ordre correspond un ordinal.

Proposition 3.15
Pour α un ordinal, pour tout $E \subset \alpha$, E est bien ordonné par $\in$.

Démonstration. Vérifions d'abord que $\in$ est un ordre strict sur E, c'est à dire que $\in$ est une relation irréflexive et transitive.
Irréflexivité : pour tout $x \in E$, on a $x \in \alpha$ donc $x \notin x$ par l'irréflexivité de $\in$ sur α.
Transitivité : pour tout $x, y, z \in E$, on a $x, y, z \in \alpha$ donc $x \in y$ et $y \in z$ implique $x \in z$ par la transitivité de $\in$ sur α.
De plus $\in$ est un bon ordre car tout sous ensemble $F \subset E$ est un sous-ensemble de α ainsi il admet un élément minimal selon le bon ordre de α. □

Ainsi dans les preuves qui vont suivre, si α est un ordinal, pour montrer que $E \subset \alpha$ est un ordinal, il suffira de montrer que E est transitif.

Proposition 3.16
Pour α un ordinal, pour tout $\beta \in \alpha$, β est un ordinal et $\beta = \alpha_\beta$.

Démonstration. Vérifions que β est un ordinal. Si $\gamma \in \beta$ pour tout $\delta \in \gamma$ on a $\delta \in \beta$ car $\in$ est un ordre sur α, donc nous avons montré que β est transitif. De plus, par la transitivité de α, on a $\beta \subset \alpha$ et par la proposition 3.15 β est bien ordonné par $\in$. Nous avons donc fini de montrer que β est un nombre ordinal. De plus l'ensemble des prédécesseurs de β est

$$\alpha_\beta = \{\gamma \in \alpha : \gamma \in \beta\} = \{\gamma \in \beta\} = \beta.$$

□

Proposition 3.17
Pour α et β des ordinaux, alors $\beta \subsetneq \alpha$ si et seulement si $\beta \in \alpha$.

Démonstration. Si nous supposons $\beta \in \alpha$, on a $\beta = \alpha_\beta \subset \alpha$. De plus $\beta \neq \alpha$ car si $\beta = \alpha$, alors β est un élément de α tel que $\beta \in \beta$ ce qui contredit le fait que l'ordre strict $\in$ soit irréflexif sur α.

Dans l'autre sens, supposons $\beta \subsetneq \alpha$. Soit alors γ minimal dans $\alpha \setminus \beta$ non vide. Par la minimalité de γ, tout élément de γ est dans β, on a donc $\gamma = \alpha_\gamma \subset \beta$. Montrons qu'on a également $\beta \subset \gamma$, auquel cas $\beta = \gamma$ appartient à α, et la proposition est montrée.

Pour tout $\delta \in \beta$, on sait $\delta \neq \gamma$ car $\gamma \notin \beta$. Par le bon ordre sur α, il existe un élément minimal à $\{\delta, \gamma\} \subset \alpha$. Ainsi soit $\delta \in \gamma$ soit $\gamma \in \delta$.
Si $\gamma \in \delta$, alors $\gamma \in \delta = \beta_\delta \subset \beta$ et $\gamma \in \beta$, d'où une contradiction car $\gamma \notin \beta$. Ainsi il ne reste que la possibilité $\delta \in \gamma$. Nous avons donc montré $\beta \subset \gamma$ et la proposition est démontrée. □

Proposition 3.18
Si α et β sont des ordinaux, alors $\alpha \cap \beta$ est un ordinal.

Démonstration. Par la proposition 3.15 il suffit de montrer que $\alpha \cap \beta$ est transitif. Pour tout $\gamma \in \alpha \cap \beta$, on a $\gamma \in \alpha$ et $\gamma \in \beta$. Comme α et β sont transitif, $\gamma \subset \alpha$ et $\gamma \subset \beta$, donc $\gamma \subset \alpha \cap \beta$. Ainsi $\alpha \cap \beta$ est transitif, la proposition est démontrée. $\square$

Proposition 3.19

1. *Pour α, β des ordinaux, exactement une des relations suivantes est vraie : $\alpha \in \beta$, $\beta \in \alpha$ ou $\alpha = \beta$.*
2. *Pour α, β, γ des ordinaux, si $\alpha \in \beta$ et $\beta \in \gamma$, alors $\alpha \in \gamma$.*
3. *Soit E un ensemble non vide d'ordinaux. Alors E est bien ordonné par $\in$. En particulier, E admet un élément minimal.*

Démonstration. Pour 1, nous savons que $\alpha \cap \beta$ est un ordinal, de plus $\alpha \cap \beta \subset \alpha$ et $\alpha \cap \beta \subset \beta$. Nous sommes donc dans l'un des quatre cas suivants :
- $\alpha \cap \beta = \alpha$, $\alpha \cap \beta = \beta$
- $\alpha \cap \beta = \alpha$, $\alpha \cap \beta \subsetneq \beta$
- $\alpha \cap \beta \subsetneq \alpha$, $\alpha \cap \beta = \beta$
- $\alpha \cap \beta \subsetneq \alpha$, $\alpha \cap \beta \subsetneq \beta$.

Les trois premiers cas se reformulent selon la proposition 3.17 par $\alpha = \beta$, $\beta \in \alpha$ ou $\alpha \in \beta$. Montrons que le quatrième cas est absurde. En effet dans le quatrième cas, on a par la proposition 3.17 que $\alpha \cap \beta \in \alpha$ et $\alpha \cap \beta \in \beta$. Ainsi $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$. Or ceci est impossible par l'irréflexivité de $\in$ vu comme une relation d'ordre stricte sur α.

Pour 2, on obtient $\alpha \in \beta$ et $\beta \subset \gamma$ car γ est transitif.

Pour 3, prenons arbitrairement $\alpha \in E$. Alors soit α est un élément minimal, soit il existe $\beta \in E$ avec $\beta \in \alpha$ Si α est un élément minimal la preuve se termine. Sinon l'ensemble $\alpha \cap E$ est non vide. Par le bon ordre sur α nous pouvons prendre β minimal dans $\alpha \cap E$. Nous allons montrer que β est alors minimal dans E. En effet pour tout $\gamma \in E$, si $\alpha \neq \gamma$ par 2 on a soit $\alpha \in \gamma$, soit $\gamma \in \alpha$ et $\beta \in \gamma$ par la minimalité de β. Si $\alpha \in \gamma$, on a $\beta \in \alpha \in \gamma$, ainsi $\beta \in \gamma$ par la transitivité de γ. Si $\gamma \in \alpha$ alors soit $\beta = \gamma$ soit $\beta \in \gamma$ par la minimalité de β dans $\alpha \cap E$.

Par le même argument, tout sous-ensemble $F \subset E$ non vide admet un élément minimal, donc E est bien ordonné par $\in$. $\square$

Nous ne pouvons pas construire un ensemble **ON** de tous les ordinaux. En effet, si tel était le cas, **ON** serait transitif par la proposition 3.16 et bien ordonné par $\in$ selon la proposition 3.19. Ce serait lui-même un ordinal, et se contiendrait lui-même, ce qui contredit la proposition 3.19.1. Nous allons donc définir **ON** comme la classe propre donnée par la formule "x est un ordinal". Ainsi lorsque nous écrirons $\alpha \in \mathbf{ON}$, ce sera l'abréviation de "α est un ordinal".

Définition 3.20
*Le **successeur** d'un ordinal α est $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$. On vérifie que $S(\alpha)$ est le plus petit ordinal qui contient α.*

*S'il existe β un ordinal tel que $\alpha = S(\beta)$, on dit que α est un **ordinal successeur**. On appelle alors β le **prédécesseur immédiat** de α.*

*Si $\alpha \neq 0$ n'a aucun prédécesseur immédiat on dit que α est un **ordinal limite**.*

Définition 3.21
*On dit qu'un ordinal n est un **nombre naturel** s'il est un ordinal successeur et ne contient que des ordinaux successeurs ou 0.*

Exemple 3.22
Les nombres 1,2,3... sont des ordinaux successeurs et des nombres naturels, en effet
- $1 = \{0\} = \{0\} \cup 0 = S(0)$
- $2 = S(1)$
- $3 = S(2)$
- ...

Remarquons aussi que si n est un nombre naturel, alors $S(n)$ est aussi un nombre naturel, ainsi que tout $m \in n$.

Nous allons construire un nombre ordinal supérieur à tous les nombres naturels.

Proposition 3.23
La classe des nombres naturels, appelée ω, est un ensemble.

Démonstration. Avec nos définitions, on peut reformuler l'axiome de l'infini de la manière suivante :

$$\exists x(0 \in x \land \forall y(y \in x \to S(y) \in x)).$$

Montrons que x contient tous les nombres naturels. Par l'absurde, supposons qu'il existe n un nombre naturel avec $n \notin x$. Ecrivons $n = S(m)$ pour un certain nombre naturel m. On a également que $m \notin x$, car $(m \in x \to S(m) \in x)$. Donc $m \in n \setminus x$ et ainsi $n \setminus x$ est un sous-ensemble non vide de l'ordinal n. Soit alors p minimal dans $n \setminus x$. Comme $0 \in x$, on obtient $p \neq 0$. Vu que $p \in n$ où n est un nombre naturel, p est un ordinal successeur. Ecrivons $p = S(q)$ pour un certain q. Or $q \in x$ par la minimalité de p, ainsi comme

$q \in x \to S(q) \in x$, on a également $p \in x$, d'où une contradiction. Nous avons fini de montrer que tout nombre naturel appartient à x.

Il résulte que $\omega = \{n \in x : n \text{ est un nombre naturel}\}$. Ainsi selon l'axiome de compréhension, ω est un ensemble. $\square$

Proposition 3.24
L'ensemble ω est un ordinal limite.

Démonstration. Montrons que ω est un ordinal. Comme ω est un ensemble de nombres ordinaux, il suffit pour cela de montrer que ω est transitif. Or pour tout $n \in \omega$, n est un nombre naturel et pour tout $m \in n$, m est un nombre naturel, ainsi $m \in \omega$ et donc $n \subset \omega$. Ainsi ω est transitif, c'est un ordinal.

De plus, ω n'est pas un ordinal successeur. Pour le prouver, supposons par l'absurde le contraire. Ainsi $\omega = S(n)$ pour un certain ordinal n. Or comme $n \in \omega$, n est alors un nombre naturel, et donc $\omega = S(n)$ est également naturel. D'où $\omega \in \omega$, une contradiction à la proposition 3.19.1. Comme $\omega \neq 0$, nous avons donc montré que ω est un ordinal limite. $\square$

Nous avons donc construit un ordinal plus grand que tous les nombres naturels. C'est le plus petit ordinal limite car il ne contient que des successeurs. Nous pouvons ensuite facilement construire des nombres ordinaux encore plus grands que ω en considérant $S(\omega)$, $S(S(\omega))$...

3.3 Relation entre bons ordres et ordinaux

Notre motivation pour construire les nombres ordinaux a été d'être isomorphe à n'importe quel bon ordre. Vérifions par ces quelques théorèmes qu'à chaque ensemble bien ordonné correspond un unique ordinal.

Proposition 3.25
Pour α, β des ordinaux, s'il existe un homomorphisme $f : \alpha \to \beta$, alors $\alpha \subset \beta$

Démonstration. Posons

$$E = \{\gamma \in \alpha : f(\gamma) = \gamma\}.$$

Si $E = \alpha$, alors f est l'identité sur α. Ainsi on obtient $\alpha = \{f(\gamma) : \gamma \in \alpha\} \subset \beta$. Il nous suffit donc de montrer que $E = \alpha$.

Par définition, $E \subset \alpha$. Supposons par l'absurde $E \subsetneq \alpha$. Ainsi $\alpha \setminus E$ est non vide et nous pouvons prendre γ minimal dans $\alpha \setminus E$. Nous allons montrer par double inclusion que $\gamma = f(\gamma)$. Si tel est le cas, alors $\gamma \in E$, d'où une contradiction.

Montrons l'inclusion $\gamma \subset f(\gamma)$. Pour tout $\delta \in \gamma$, comme f est un homomorphisme, on a $f(\delta) \in f(\gamma)$. De plus, comme γ est minimal dans $\alpha \setminus E$, on a $\delta \in E$. Par construction de E, on tire $\delta = f(\delta)$. Nous avons donc montré que pour tout $\delta \in \gamma$, $\delta \in f(\gamma)$, autrement dit, $\gamma \subset f(\gamma)$.

Montrons l'inclusion $f(\gamma) \subset \gamma$. Pour tout $\delta \in f(\gamma)$, on a $f^{-1}(\delta) \in \gamma$ comme f^{-1} est un homomorphisme. A nouveau, par la minimalité de γ dans $\alpha \setminus E$, on obtient $f^{-1}(\delta) \in E$. Donc $f^{-1}(\delta) = f(f^{-1}(\delta)) = \delta$. Et donc $\delta \in \gamma$. Ainsi $f(\gamma) \subset \gamma$ et nous avons prouvé la double inclusion, $\gamma = f(\gamma)$.

Nous tirons donc une contradiction de l'hypothèse $E \subsetneq \alpha$. On a bien $E = \alpha$ et ainsi $\alpha \subset \beta$. □

Proposition 3.26
Pour α, β des ordinaux, si $\alpha \cong \beta$, alors $\alpha = \beta$

Démonstration. Soit $f : \alpha \to \beta$ un isomorphisme. Comme f est un homomorphisme entre α et β, on a $\alpha \subset \beta$. De même, comme f^{-1} est un homomorphisme entre β et α, on a $\beta \subset \alpha$. La proposition est donc montrée par double inclusion. □

Lemme 3.27
Soit $(E, <_E)$ et $(F, <_F)$ deux bons ordres et $f : E \to F$ un isomorphisme. Alors pour tout $x \in E$, la restriction $f|_{E_x}$ est un isomorphisme entre $(E_x, <_E)$ et $(F_{f(x)}, <_F)$.

Démonstration. Pour tout $x \in E$, vérifions que $f|_{E_x}$ est un homomorphisme bijectif entre E_x et $F_{f(x)}$. L'injectivité de $f|_{E_x}$ vient de l'injectivité de f. De plus, pour tout $x, y \in E$ avec $x <_E y$ on a $f|_{E_x}(x) <_F f|_{E_x}(y)$. On a alors que $f|_{E_x}$ est bien un homomorphisme.

Pour la surjectivité, pour tout $y \in F_{f(x)}$, on a $y <_F f(x)$. Ainsi $f^{-1}(y) <_E x$. Donc $f^{-1}(y)$ est un élément de E_x tel que $f|_{E_x}(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y)) = y$. Nous avons donc montré que $f|_{E_x}$ est surjective.

Pour conclure, la proposition 3.11 nous dit que tout homomorphisme surjectif sur des bons ordres est un isomorphisme. □

Lemme 3.28
Soit $(E, <)$ un bon ordre tel que pour tout $x \in E$, l'ensemble des prédécesseurs $(E_x, <)$ est isomorphe à un ordinal. Alors $(E, <)$ est isomorphe à un ordinal.

Démonstration. Dans cette preuve, il s'agit de construire à partir de $(E, <)$, un ordinal α ayant la propriété recherchée.

Par la proposition 3.26 nous savons que pour tout $x \in E$, l'ordinal β isomorphe à $(E_x, <)$ est unique. Par l'axiome de remplacement, nous pouvons alors construire

$$\alpha = \{\beta \in \mathbf{ON} : \text{il existe } x \in E, \beta \cong (E_x, <)\}.$$

Posons la fonction $\phi : E \to \alpha$ qui à $x \in E$ associe l'unique ordinal β tel que $\beta \cong (E_x, <)$.

Il suffit alors de montrer que α est un ordinal et que ϕ est un isomorphisme entre $(E, <)$ et α.

Montrons tout d'abord l'assertion suivante :

$$\text{pour tout } x \in E, \text{ on a } \phi(x) = \{\phi(y) : y < x\}. \tag{1}$$

Pour tout $x \in E$, nous allons montrer une double inclusion entre $\phi(x)$ et $\{\phi(y) : y < x\}$.

Montrons que $\phi(x)$ est inclu dans $\{\phi(y) : y < x\}$. Pour tout $\gamma \in \phi(x)$, on a $\gamma = \phi(x)_\gamma$. Soit $f : \phi(x) \to E_x$ un isomorphisme. Par le lemme 3.27, $\phi(x)_\gamma$ est isomorphe à $((E_x)_{f(\gamma)}, <)$. Or, comme $f(\gamma) \in E_x$, on a $f(\gamma) < x$ et ainsi :

$$\begin{aligned}
(E_x)_{f(\gamma)} &= \{y \in E_x : y < f(\gamma)\} \\
&= \{y \in E : y < x \text{ et } y < f(\gamma)\} \\
&= \{y \in E : y < f(\gamma)\} \\
&= E_{f(\gamma)}.
\end{aligned}$$

Or $(E_{f(\gamma)}, <) \cong \phi(f(\gamma))$. Nous avons donc un isomorphisme entre les ordinaux γ et $\phi(f(\gamma))$. Par la proposition 3.26, ils sont égaux. Nous avons donc montré que $\gamma \in \{\phi(y) : y < x\}$.

Montrons alors l'inclusion inverse, de $\{\phi(y) : y < x\}$ dans $\phi(x)$. Pour tout $\gamma \in \{\phi(y) : y < x\}$, on a $\gamma = \phi(y)$ pour un certain $y \in E_x$. Ainsi $\phi(y)$ est isomorphe à $(E_y, <)$. Or

$$\begin{aligned}
E_y &= \{z \in E : z < y\} \\
&= \{z \in E : z < y \text{ et } z < x\} \\
&= \{z \in E_x : z < y\} \\
&= (E_x)_y.
\end{aligned}$$

Soit $\psi : E_x \to \phi(x)$ un isomorphisme. Par le lemme 3.27, $((E_x)_y, <)$ est isomorphe à $\phi(x)_{\psi(y)} = \psi(y)$. Ainsi nous avons montré que les ordinaux γ et $\psi(y)$ sont isomorphes. Ils sont donc égaux. Ainsi $\gamma \in \phi(x)$. Nous avons fini de montrer la double inclusion, donc l'assertion est démontrée.

Montrons maintenant que α est un ordinal. En tant qu'ensemble de nombres ordinaux, α est bien ordonné par $\in$ selon la proposition 3.19.3. Il reste alors à montrer que α est transitif. Pour tout $\beta \in \alpha$, on a $\beta = \phi(x)$ pour un certain $x \in E$. Or selon l'assertion (1), $\phi(x) = \{\phi(y) : y < x\}$, et $\{\phi(y) : y < x\} \subset \alpha$. Ainsi on a montré que $\beta \subset \alpha$, alors α est bien transitif.

Pour terminer la preuve, il reste juste à montrer que ϕ est un isomorphisme. Par construction de α, la fonction ϕ est surjective.

Pour tout $x, y \in E$, avec $x < y$, montrons $\phi(y) \in \phi(x)$. Comme $x < y$, on a $\phi(y) \in \{\phi(z) : z < x\}$. Ainsi par l'assertion (1), $\{\phi(z) : z < x\} = \phi(x)$ et ainsi $\phi(y) \in \phi(x)$.

Ainsi nous avons montré que ϕ est un homomorphisme surjectif entre $(E, <)$ et α. Par la proposition 3.11, ϕ est un isomorphisme entre ces bons ordres. Le lemme est ainsi démontré. □

Proposition 3.29
Soit $(E, <)$ un bon ordre. Alors il existe un unique ordinal α isomorphe à $(E, <)$.

Démonstration. L'unicité est donnée par la proposition 3.26. Montrons que pour tout $x \in E$, le bon ordre $(E_x, <)$ est isomorphe à un ordinal. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in E$, avec $(E_x, <)$ isomorphe à aucun ordinal. En prenant un tel x minimal, pour tout $y \in E_x$, le bon ordre $((E_x)_y, <) = (E_y, <)$ est isomorphe à un ordinal. Ainsi par le lemme 3.28, $(E_x, <)$ est isomorphe à un ordinal, d'où une contradiction. Donc pour tout $x \in E$, on a $(E_x, <)$ isomorphe à un ordinal, par le lemme 3.28, le théorème est démontré. □

Grâce à cette proposition, nous pouvons restreindre l'étude des ensembles bien ordonnés à l'étude des nombres ordinaux.

3.4 Raisonnement par induction et définition par récurrence

Cette section utilise la notion de classe pour démontrer des schémas de théorèmes. Ils sont appelés schéma de théorème car à chaque formule ϕ qui caractérise une classe $\mathbf{C}$, nous obtenons un nouveau théorème.

Théorème 3.30 (Raisonnement par induction)
Soit $\boldsymbol{C}$ une classe non vide d'ordinaux. Alors $\boldsymbol{C}$ admet un élément minimal.

Démonstration. La preuve suit le même raisonnement que celle de la proposition 3.19.3, mais avec des classes. Soit arbitrairement $\alpha \in \mathbf{C}$ alors soit α est minimal dans $\mathbf{C}$, soit $\mathbf{C} \cap \alpha$ est non vide. Alors l'élément minimal de l'ensemble $\mathbf{C} \cap \alpha$ est minimal dans $\mathbf{C}$. □

Corollaire 3.31
Soit $\boldsymbol{C}$ une classe. Si pour tout $\alpha \in \boldsymbol{ON}$, on a $(\forall \beta \in \alpha, \beta \in \boldsymbol{C}) \rightarrow (\alpha \in \boldsymbol{C})$, alors $\boldsymbol{ON} \subset \boldsymbol{C}$.

Démonstration. Nous allons montrer que $\mathbf{ON} \setminus \mathbf{C} = \varnothing$. Supposons par l'absurde que $\mathbf{ON} \setminus \mathbf{C} \neq \varnothing$. Selon le théorème 3.30, la classe $\mathbf{ON} \setminus \mathbf{C}$ posséde un élément minimal β. Nous allons montrer que $\beta \in \mathbf{C}$, d'où une contradiction à $\beta \in \mathbf{ON} \setminus \mathbf{C}$. Pour tout $\alpha \in \beta$, on a que $\alpha \in \mathbf{C}$ par la minimalité de β dans $\mathbf{ON} \setminus \mathbf{C}$. Ainsi $\beta \subset \mathbf{C}$, et selon l'hypothèse, on a $\beta \in \mathbf{C}$, d'où la contradiction recherchée. Nous avons donc montré que $\mathbf{ON} \setminus \mathbf{C}$ est vide, ce qui implique $\mathbf{ON} \subset \mathbf{C}$. □

Ce corollaire nous est utile si l'on souhaite montrer que tout ordinal α satisfait une formule ϕ. On dit alors que l'on montre ϕ par induction sur α. On suppose donc que pour tout $\beta \in \alpha$, la formule $\phi_{[\beta/\alpha]}$ est satisfaite. Cette hypothèse est appellée hypothèse de récurrence. En utilisant l'hypothèse de récurrence on montre que ϕ est satisfaite. Le corrollaire nous assure alors que ϕ est satisfaite pour tout $\alpha \in \mathbf{ON}$ sans autre hypothèse.

Le prochain théorème permet des définitions par récurrence. Rappelons que $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$ dénote la classe de tous les ensembles.

Théorème 3.32 (Principe de définition par récurrence transfinie)
Si $F : \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{V}$ une classe fonctionnelle. Alors il existe une unique classe fonctionnelle $G : \boldsymbol{ON} \rightarrow \boldsymbol{V}$ tel que pour tout $\alpha \in \boldsymbol{ON}$

$$G(\alpha) = F(G|_\alpha)$$

Démonstration. Pour $\delta \in \mathbf{ON}$ nous appellons **δ-approximation** une fonction $g : \delta \rightarrow \mathbf{V}$ telle que pour tout $\alpha \in \delta$, on a $g(\alpha) = F(g|_\alpha)$.

Remarquons tout d'abord que pour tout $\delta \in \mathbf{ON}$, s'il existe une δ-approximation, elle est unique. En effet, supposons que g_δ et g'_δ sont deux δ-approximations. On va montrer par induction sur $\alpha \in \delta$ que $g_\delta(\alpha) = g'_\delta(\alpha)$. En supposant que $g_\delta(\beta) = g'_\delta(\beta)$ pour tout $\beta \in \alpha$, on a bien $g_\delta(\alpha) = F(g_\delta|_\alpha) = F(g'_\delta|_\alpha) = g'_\delta(\alpha)$. D'où l'unicité de la δ-approximation.

Montrons maintenant que pour tout $\delta \in \mathbf{ON}$, il existe une δ-approximation g_δ. Par induction, supposons que le résultat est vrai pour tout $\alpha \in \delta$. Posons la fonction $g_\delta : \delta \rightarrow \mathbf{V}$ qui, à tout $\alpha \in \delta$ associe

$$g_\delta(\alpha) = F(g_\alpha).$$

Montrons que g_δ est bien une δ-approximation. Pour cela, montrons que pour tout $\alpha \in \delta$, on a $g_\alpha = g_\delta|_\alpha$. Pour tout $\beta \in \alpha$, la restriction $g_\alpha|_\beta$ est une β-approximation. Donc, par l'unicité de la β-approximation, on trouve $g_\beta =$

$g_\alpha|_\beta$. Ainsi on a $F(g_\beta) = F(g_\alpha|_\beta)$. Or on a $F(g_\beta) = g_\delta(\beta)$ et $F(g_\alpha|_\beta) = g_\alpha(\beta)$. Nous avons donc montré que pour tout $\beta \in \alpha$, on a $g_\alpha(\beta) = g_\delta(\beta)$ et ainsi $g_\alpha = g_\delta|_\alpha$. Il s'ensuit que $g_\delta(\alpha) = F(g_\alpha) = F(g_\delta|_\alpha)$. Nous avons ainsi montré que g_δ est une δ-approximation.

Par induction, nous avons alors construit une unique δ-approximation pour tout $\delta \in \mathbf{ON}$.

La classe fonctionnelle recherchée est $G : \mathbf{ON} \to \mathbf{V}$, qui à tout $\alpha \in \mathbf{ON}$ associe

$$G(\alpha) = F(g_\alpha).$$

Ainsi définie, pour tout $\delta \in \mathbf{ON}$, on a $G|_\delta = g_\delta$. Il en découle que $G(\delta) = F(g_\delta) = F(G|_\delta)$, comme recherché.

Pour l'unicité, si G et G' satisfont la propriété, montrons que pour tout $\alpha \in \mathbf{ON}$, $G(\alpha) = G'(\alpha)$ par induction. En effet si pour tout $\beta \in \alpha$, $G(\beta) = G'(\beta)$, alors

$$G(\alpha) = F(G|_\alpha) = F(G'|_\alpha) = G'(\alpha).$$

$\square$

Le principe de définition par récurrence transfinie nous permet de créer des fonctions $G : \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$. Pour cela, il nous suffit de définir F qui donne le comportement de G en α, en fonction de $G|_\alpha$.

Par exemple si nous avons $\alpha \in \mathbf{ON}$, $f : \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$, on sait qu'il existe un unique $G : \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ tel que :

- $G(0) = \alpha$
- $G(S(\beta)) = f(G(\beta))$
- $G(\beta) = \bigcup_{\delta \in \beta} G(\delta)$ si β est un ordinal limite.

Pour le voir, il suffit de définir $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ par

$$F(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = \varnothing \\ f(x(\beta)) & \text{si } x \text{ est une fonction de domaine } S(\beta) \\ \bigcup_{\delta \in \beta} x(\delta) & \text{si } x \text{ est une fonction de domaine } \beta \text{ un ordinal limite} \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}$$

et d'appliquer le principe de définition à F.

3.5 Suites d'ordinaux

Dans ce chapitre nous allons montrer des résultats sur la convergence de suites d'ordinaux.

Notation 3.33
*A partir de ce chapitre, pour tout $\alpha, \beta \in$ **ON** et pour tout ensemble d'ordinaux E, nous allons noter :*

- $\alpha < \beta$ *pour dire* $\alpha \in \beta$,
- $\alpha \leq \beta$ *pour dire* $\alpha \subset \beta$,
- $\sup E$ *pour dire* $\cup E$.

Remarque 3.34
Pour tout ensemble d'ordinaux E, la définition $\sup E$ pour dire $\cup E$ se justifie, car on a

$$(\forall \alpha < \sup E)(\exists \beta \in E)(\alpha < \beta).$$

Démonstration. Soit $\alpha < \sup E$, en d'autres termes, $\alpha \in \cup E$, et ainsi par définition, il existe $\beta \in E$ avec $\alpha < \beta$. □

Définition 3.35
On appelle ***suite d'ordinaux*** *et on note* $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \beta}$ *toute fonction* $f : \beta \to \boldsymbol{ON}$ *qui à* $\gamma \in \beta$ *associe l'ordinal* $f(\gamma)$ *noté alors* α_γ.

Définition 3.36
Soit β *un ordinal limite, et* $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \beta}$ *une suite. Pour* $\alpha \in \boldsymbol{ON}$ *on écrit :*

$$\alpha = \lim_{\gamma < \beta} \alpha_\gamma$$

si et seulement si

$$(\forall \lambda < \alpha)(\exists \delta < \beta)(\forall \gamma)(\delta \leq \gamma < \beta \to \lambda < \alpha_\gamma \leq \alpha).$$

S'il existe un tel α, *on dit que* α *est la* ***limite*** *de* $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \beta}$.

Définition 3.37
Soit $f : \boldsymbol{ON} \to \boldsymbol{ON}$. *On dit que* f *est* ***croissante*** *si pour tout* $\alpha, \beta \in \boldsymbol{ON}$, *on a*

$$\alpha < \beta \to f(\alpha) < f(\beta).$$

De même, on dit qu'une suite d'ordinaux $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \beta}$ *est croissante si pour tout* $\gamma, \delta \in \beta$, *on a*

$$\gamma < \delta \to \alpha_\gamma < \alpha_\delta.$$

Proposition 3.38
Soit β *un ordinal limite, et* $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \beta}$ *une suite croissante. Alors*

$$\lim_{\gamma < \beta} \alpha_\gamma = \sup\{\alpha_\gamma : \gamma < \beta\}.$$

Démonstration. Il nous faut montrer la formule suivante :

$$(\forall \lambda < \sup\{\alpha_\gamma : \gamma < \beta\})(\exists \delta < \beta)(\forall \gamma)(\delta < \gamma < \lambda \to \lambda < \alpha_\gamma \leq \sup\{\alpha_\gamma : \gamma < \beta\}).$$

Remarquons déjà que pour tout $\gamma < \beta$ on a $\alpha_\gamma \leq \sup\{\alpha_\gamma : \gamma < \beta\}$. Soit $\lambda < \sup\{\alpha_\gamma : \gamma < \beta\}$, par la remarque 3.34 on sait qu'il existe $\theta \in \{\alpha_\gamma : \gamma < \beta\}$ avec $\lambda < \theta$. Ecrivons $\theta = \alpha_\delta$ pour un certain $\delta < \beta$. Il résulte que pour tout γ, si $\delta < \gamma < \lambda$ alors $\alpha_\delta < \alpha_\gamma$ comme la suite est croissante. On a fini de montrer que $\lambda < \alpha_\gamma \leq \sup\{\alpha_\gamma : \gamma < \beta\}$, d'où la proposition. $\square$

Proposition 3.39
Soit β un ordinal limite, et $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\beta}$ une suite croissante. Alors $\lim_{\gamma<\beta} \alpha_\gamma$ est un ordinal limite.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\lim_{\gamma<\beta} \alpha_\gamma = S(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{ON}$. Ainsi $\lambda < \lim_{\gamma<\beta} \alpha_\gamma$ et par définition de la limite, il existe $\delta < \beta$ avec $\lambda < \alpha_\delta$. On en tire $S(\lambda) \leq \alpha_\delta$. Comme la suite est croissante, on a $\alpha_\delta < \alpha_{S(\delta)}$, et ainsi $S(\lambda) < \alpha_{S(\delta)}$. On en tire $S(\lambda) < \sup\{\alpha_\gamma : \gamma < \beta\} = \lim_{\gamma<\beta} \alpha_\gamma$, d'où une contradiction. On a donc montré que $\lim_{\gamma<\beta} \alpha_\gamma$ est un ordinal limite. $\square$

Définition 3.40
*Soit $f : \boldsymbol{ON} \to \boldsymbol{ON}$. On dit que f est **normale** si f est croissante et pour tout ordinal limite $\alpha \in \boldsymbol{ON}$, on a*

$$\lim_{\beta<\alpha} f(\beta) = f(\alpha).$$

Proposition 3.41
Soit $f : \boldsymbol{ON} \to \boldsymbol{ON}$ une fonction qui satisfait les deux conditions suivantes :
- *pour tout ordinal $\alpha \in \boldsymbol{ON}$, on a $f(\alpha) < f(S(\alpha))$,*
- *pour tout ordinal limite $\alpha \in \boldsymbol{ON}$, on a $f(\alpha) = \sup\{f(\beta) : \beta < \alpha\}$.*

Alors f est normale.

Démonstration. Nous allons montrer que f est croissante. Pour tout $\alpha \in \mathbf{ON}$ nous allons montrer par induction sur β que si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) < f(\beta)$. Supposons donc que pour tout $\gamma \in \beta$ on a déjà que $\alpha < \gamma$ implique $f(\alpha) < f(\gamma)$.

Si $\beta = 0$ il n'y a rien à prouver car $0 \leq \alpha$.

Si $\beta = S(\gamma)$ pour un certain $\gamma \in \mathbf{ON}$, alors $\alpha < S(\gamma)$ implique que $\alpha \leq \gamma$. On a alors soit $\alpha = \gamma$ soit $\alpha < \gamma$ Si $\alpha = \gamma$ alors $f(\alpha) = f(\gamma)$, sinon on a $\alpha < \gamma$ et par hypothèse de récurrence, $f(\alpha) < f(\gamma)$. Donc dans tous les cas on a $f(\alpha) \leq f(\gamma)$. On en déduit

$$f(\alpha) \leq f(\gamma) < f(S(\gamma)) = f(\beta).$$

Si β est un ordinal limite, si $\alpha < \beta$ alors on a également $S(\alpha) < \beta$. Or $f(\beta) = \sup\{f(\gamma) : \gamma < \beta\}$ et ainsi $f(S(\alpha)) \leq f(\beta)$. Il en résulte

$$f(\alpha) < f(S(\alpha)) \leq f(\beta).$$

Nous avons donc fini de montrer par induction que f est croissante.

Comme f est croissante, on peut reformuler la deuxième condition par :

$$\text{pour tout ordinal limite } \alpha \in \mathbf{ON}, \text{ on a } f(\alpha) = \lim_{\beta<\alpha} f(\beta).$$

Ainsi on a montré que f est normale. □

Proposition 3.42
Soit f : $\boldsymbol{ON} \to \boldsymbol{ON}$ une fonction normale, $\beta \in \boldsymbol{ON}$ un ordinal limite et $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\beta}$ une suite croissante. Alors

$$\lim_{\gamma<\beta} f(\alpha_\gamma) = f(\lim_{\gamma<\beta} \alpha_\gamma).$$

Démonstration. Par la proposition 3.39 la limite $\lim_{\gamma<\beta} \alpha_\gamma$ est un ordinal limite. Ainsi, comme f est normale, on a $f(\lim_{\gamma<\beta} \alpha_\gamma) = \lim_{\gamma<\beta} f(\alpha_\gamma)$, d'où la proposition. □

3.6 Arithmétique ordinale

Dans ce chapitre nous allons utiliser le principe de définition par récurrence transfinie pour étendre à tous les nombres ordinaux l'arithmétique que nous connaissons sur les nombres naturels. Les démonstrations par inductions nous permettrons de trouver les propriétés de cette arithmétique.

Définition 3.43 (Addition)
Pour $\alpha \in \boldsymbol{ON}$ fixé, on a par le principe de définition une unique fonction $G_\alpha : \boldsymbol{ON} \to \boldsymbol{ON}$ notée $G_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$ telle que
- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$
- $\alpha + \beta = \sup_{\gamma\in\beta}(\alpha + \gamma)$ *si β est un ordinal limite.*

Proposition 3.44
Pour tout $\alpha \in \boldsymbol{ON}$, la fonction G_α qui à $\beta \in \boldsymbol{ON}$ associe $G_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$ est normale.

Démonstration. Selon la proposition 3.41 il nous suffit de voir que pour tout ordinal $\beta \in \mathbf{ON}$, on a $G_\alpha(\beta) < S(G_\alpha(\beta)) = G_\alpha(S(\beta))$. □

Remarque 3.45
La somme $\alpha + \beta$ correspond à l'unique ordinal isomorphe à :

$$((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta), <_{lex})$$

Où $<_{lex}$ est l'ordre lexicographique défini par $(c, \gamma) <_{lex} (d, \delta)$ si et seulement si $c < d$ ou $c = d \wedge \gamma \in \delta$.

Esquisse de preuve. Notons $\alpha \oplus \beta$ l'ordinal isomorphe à

$$((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta), <_{lex}).$$

On peut trouver les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \alpha \oplus 0 &\cong (\{0\} \times \alpha, <_{lex}) \\ &\cong \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \oplus S(\beta) &\cong ((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta) \cup \{(1, \beta)\}, <_{lex}) \\ &\cong S(\alpha \oplus \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \oplus \beta &\cong ((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta), <_{lex}) \\ &\cong (\bigcup_{\gamma \in \beta} ((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \gamma)), <_{lex}) \\ &\cong \bigcup_{\gamma \in \beta} (\alpha \oplus \gamma) \end{aligned}$$

Ainsi par l'unicité de la fonction + qui satisfait ces propriétés, on a bien que les deux notions coincident. □

Proposition 3.46 (Associativité de l'addition)
Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{ON}$, on a :

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Démonstration. Nous allons montrer l'associativité par induction sur γ. Suppsosons que pour tout $\delta \in \gamma$, on a déjà $\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta$.

Si $\gamma = 0$, alors $\alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta = (\alpha + \beta) + 0$.

Si γ est un ordinal successeur, $\gamma = S(\delta)$ pour un certain $\delta \in \mathbf{ON}$, alors

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + S(\delta)) &= \alpha + S(\beta + \delta) \\ &= S(\alpha + (\beta + \delta)) \\ &= S((\alpha + \beta) + \delta) \\ &= (\alpha + \beta) + S(\delta). \end{aligned}$$

Si γ est un ordinal limite, alors

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + \gamma) &= \alpha + \lim_{\delta < \gamma} (\beta + \delta) \\ &= \lim_{\delta < \gamma} \alpha + (\beta + \delta) \\ &= \lim_{\delta < \gamma} (\alpha + \beta) + \delta \\ &= (\alpha + \beta) + \gamma. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.47 (Commutativité des naturels)
Pour tout nombres naturels $n, m < \omega$, on a :

$$n + m = m + n.$$

Démonstration. Montrons par induction sur m que $0+m = m+0$. Si $m = 0$ alors on a bien $0 + 0 = 0 + 0$. Sinon $m = S(q)$ pour un certain $q < \omega$. Alors on a $0 + S(q) = S(0 + q)$. Par hypothèse de récurrence on a $0 + q = q + 0$. Ainsi on a

$$0 + S(q) = S(0 + q) = S(q + 0) = S(q) = S(q) + 0.$$

Nous avons fini de montrer par induction que pour tout $m < \omega$, on a $0+m = m + 0$.

Montrons également par induction sur m que pour tout $p < \omega$ on a $S(p) + m = S(p + m)$. Si $m = 0$ alors on a bien

$$S(p) + 0 = S(p) = S(p + 0).$$

Sinon $m = S(q)$ pour un certain $q < \omega$. Alors $S(p) + S(q) = S(S(p) + q)$. Par hypothèse de récurrence on a $S(p) + q = S(p + q)$. Ainsi on trouve

$$S(p) + S(q) = S(S(p) + q) = S(S(p + q)) = S(p + S(q)).$$

Nous avons fini de montrer par induction que pour tout $p, m < \omega$, on a $S(p) + m = S(p + m)$.

Montrons maintenant par induction sur n la commutativité, à savoir que pour tout $n, m < \omega$, on a $n + m = m + n$. Si $n = 0$, alors on a montré que $0 + m = m + 0$. Sinon, $n = S(p)$ pour un certain $p \in \omega$. On a déjà vu $S(p)+m = S(p+m)$. Par hypothèse de récurrence on a $p+m = m+p$, donc

$$S(p) + m = S(p + m) = S(m + p) = m + S(p).$$

On a ainsi fini de montrer la commutativité. □

La commutativité est en générale fausse si α et β ne sont pas naturels. Par exemple, $1 + \omega = \lim_{\alpha\in\omega}(1 + \alpha) = \omega$ mais $\omega + 1 = S(\omega) \neq \omega$.

Définition 3.48 (Multiplication)
*Pour $\alpha \in$ **ON** fixé, on définit la multiplication $\alpha \cdot \beta$ telle que*

- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot S(\beta) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
- $\alpha \cdot \beta = \sup_{\gamma\in\beta}(\alpha \cdot \gamma)$ *si β est un ordinal limite.*

Proposition 3.49
Pour tout $\beta \in \boldsymbol{ON}$, on a $0 \cdot \beta = 0$.

Démonstration. Par induction sur β, on suppose que pour tout $\gamma < \beta$ on a $0 \cdot \gamma = 0$.

Si $\beta = 0$ on a $0 \cdot 0 = 0$.

Si $\beta = S(\gamma)$ pour un certain $\gamma \in \mathbf{ON}$, on a $0 \cdot S(\gamma) = (0 \cdot \gamma) + 0 = 0 + 0 = 0$.

Sinon β est un ordinal limite et $0 \cdot \beta = \sup_{\gamma \in \beta}(0 \cdot \gamma) = \sup_{\gamma \in \beta} 0 = 0$.

D'où la proposition. □

Proposition 3.50
Pour tout $\alpha \in \boldsymbol{ON}$, si $0 < \alpha$, la fonction qui à tout $\beta \in \boldsymbol{ON}$ associe $\alpha \cdot \beta$ est normale.

Démonstration. Selon la proposition 3.41 il nous suffit de voir que pour tout ordinal $\beta \in \mathbf{ON}$, on a

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 < \alpha \cdot \beta + \alpha = \alpha \cdot S(\beta).$$

□

Remarque 3.51
Le produit $\alpha \cdot \beta$ correspond à l'unique ordinal isomorphe à :

$$\beta \times \alpha \text{ muni de } <_{lex} \text{ l'ordre lexicographique.}$$

Proposition 3.52 (Distributivité à gauche)
Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{ON}$, on a :

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

Démonstration. Si $\alpha = 0$ la proposition est évidente. Sinon, on a alors que la fonction qui à tout $\beta \in \mathbf{ON}$ associe $\alpha \cdot \beta$ est normale.

On montre la distributibité à gauche $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ par induction sur $\gamma \in \mathbf{ON}$. Si $\gamma = 0$ alors on a :

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + 0) &= \alpha \cdot \beta \\ &= \alpha \cdot \beta + 0 \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0. \end{aligned}$$

Si γ est un ordinal successeur, on a alors $\gamma = S(\delta)$ pour un certain $\delta \in \mathbf{ON}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + S(\delta)) &= \alpha \cdot S(\beta + \delta) \\ &= \alpha \cdot (\beta + \delta) + \alpha \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta + \alpha \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot S(\delta). \end{aligned}$$

Si γ est un ordinal limite on a :

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \alpha \cdot \lim_{\delta<\gamma}(\beta + \delta) \\ &= \lim_{\delta<\gamma} \alpha \cdot (\beta + \delta) \\ &= \lim_{\delta<\gamma} \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta \\ &= \alpha \cdot \beta + \lim_{\delta<\gamma} \alpha \cdot \delta \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.\end{aligned}$$

Nous avons donc fini de montrer par induction distributibité à gauche de la multiplication par rapport à l'addition. □

Proposition 3.53 (Associativité de la multiplication)
Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{ON}$, on a :

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma.$$

Démonstration. Si $\alpha = 0$ la proposition est évidente. Sinon, on a alors que la fonction qui à tout $\beta \in \mathbf{ON}$ associe $\alpha \cdot \beta$ est normale.

On montre l'associativité $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ par induction sur $\gamma \in \mathbf{ON}$. Si $\gamma = 0$ alors on a :

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta \cdot 0) &= \alpha \cdot 0 \\ &= 0 \\ &= (\alpha \cdot \beta) \cdot 0\end{aligned}$$

Si γ est un ordinal successeur, on a alors $\gamma = S(\delta)$ pour un certain $\delta \in \mathbf{ON}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta \cdot S(\delta)) &= \alpha \cdot (\beta \cdot \delta + \beta) \\ &= \alpha \cdot (\beta \cdot \delta) + \alpha \cdot \beta \\ &= (\alpha \cdot \beta) \cdot \delta + \alpha \cdot \beta \\ &= (\alpha \cdot \beta) \cdot S(\delta).\end{aligned}$$

Si γ est un ordinal limite on a :

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &= \alpha \cdot \lim_{\delta<\gamma}(\beta \cdot \delta) \\ &= \lim_{\delta<\gamma} \alpha \cdot (\beta \cdot \delta) \\ &= \lim_{\delta<\gamma}(\alpha \cdot \beta) \cdot \delta \\ &= (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma.\end{aligned}$$

Nous avons donc fini de montrer par induction l'associativité de la multiplication sur les nombre ordinaux. □

Proposition 3.54
Pour tout $n, m < \omega$*, on a :*

$$n \cdot m = m \cdot n.$$

Démonstration. Preuve similaire à la preuve de la commutativité de l'addition pour les nombres naturels □

La multiplication n'est pas commutative dans le cas général si α ou β sont infinis. En effet,

$$2 \cdot \omega = \bigcup_{\delta \in \omega} (2 \cdot \delta) = \omega, \text{ mais } \omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq \omega.$$

De même on n'a pas de distributivité à droite de la multiplication par rapport à l'addition, car :

$$(1 + 1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega, \text{ mais } 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega = \omega + \omega \neq \omega.$$

Définition 3.55 (Puissance)
Pour $\alpha \in \boldsymbol{ON}$ *fixé, on définit la puissance* α^β *par*
- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^{S(\beta)} = (\alpha^\beta) \cdot \alpha$
- $\alpha^\beta = \sup_{\gamma \in \beta}(\alpha^\gamma)$ *si* β *est un ordinal limite.*

Proposition 3.56
Voici quelques cas particuliers, pour tout $\beta \in \boldsymbol{ON}$ *:*
- $0^0 = 1,$
- $0^\beta = 0$ *si* $0 < \beta,$
- $1^\beta = 1.$

Démonstration. Les preuves sont de simples inductions sur β. □

Proposition 3.57
Pour tout $\alpha \in \boldsymbol{ON}$*, si* $1 < \alpha$ *la fonction qui à* $\beta \in \boldsymbol{ON}$ *associe* α^β *est normale.*

Démonstration. Selon la proposition 3.41 il nous suffit de voir que pour tout ordinal $\beta \in \mathbf{ON}$, on a

$$\alpha^\beta = \alpha^\beta \cdot 1 < \alpha^\beta \cdot \alpha = \alpha^{S(\beta)}.$$

□

Proposition 3.58
Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{ON}$, on a :

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma.$$

Démonstration. Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ la proposition est évidente. Sinon, la fonction qui à $\beta \in \mathbf{ON}$ associe α^β est normale. La preuve se fait alors par induction sur γ.

Si $\gamma = 0$ alors on a :

$$\begin{aligned}\alpha^{\beta+0} &= \alpha^\beta \\ &= \alpha^\beta \cdot 1 \\ &= \alpha^\beta \cdot \alpha^0.\end{aligned}$$

Si γ est un ordinal successeur, on a alors $\gamma = S(\delta)$ pour un certain $\delta \in \mathbf{ON}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\alpha^{\beta+S(\delta)} &= \alpha^{S(\beta+\delta)} \\ &= \alpha^{\beta+\delta} \cdot \alpha \\ &= (\alpha^\beta \cdot \alpha^\delta) \cdot \alpha \\ &= \alpha^\beta \cdot (\alpha^\delta \cdot \alpha) \\ &= \alpha^\beta \cdot \alpha^{S(\delta)}.\end{aligned}$$

Si γ est un ordinal limite on a :

$$\begin{aligned}\alpha^{\beta+\gamma} &= \alpha^{\lim_{\delta<\gamma} \beta+\delta} \\ &= \lim_{\delta<\gamma} \alpha^{\beta+\delta} \\ &= \lim_{\delta<\gamma} \alpha^\beta \cdot \alpha^\delta \\ &= \alpha^\beta \cdot \lim_{\delta<\gamma} \alpha^\delta \\ &= \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma.\end{aligned}$$

Nous avons donc fini de montrer la propriété par induction. □

Proposition 3.59
Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{ON}$, on a :

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}.$$

Démonstration. Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ la proposition est évidente. Sinon, la fonction qui à $\beta \in \mathbf{ON}$ associe α^β est normale. La preuve se fait alors par induction sur γ.

Si $\gamma = 0$ alors on a :

$$\begin{aligned}(\alpha^\beta)^0 &= 1\\ &= \alpha^0\\ &= \alpha^{\beta\cdot 0}.\end{aligned}$$

Si γ est un ordinal successeur, on a alors $\gamma = S(\delta)$ pour un certain $\delta \in \mathbf{ON}$. On a alors :

$$\begin{aligned}(\alpha^\beta)^{S(\delta)} &= (\alpha^\beta)^\delta \cdot \alpha^\beta\\ &= \alpha^{\beta\cdot\delta}\cdot\alpha^\beta\\ &= \alpha^{\beta\cdot\delta+\beta}\\ &= \alpha^{\beta\cdot S(\delta)}.\end{aligned}$$

Si γ est un ordinal limite on a :

$$\begin{aligned}(\alpha^\beta)^\gamma &= \lim_{\delta<\gamma}(\alpha^\beta)^\delta\\ &= \lim_{\delta<\gamma}\alpha^{\beta\cdot\delta}\\ &= \alpha^{\lim_{\delta<\gamma}\beta\cdot\delta}\\ &= \alpha^{\beta\cdot\gamma}.\end{aligned}$$

Nous avons donc fini de montrer la propriété par induction. □

4 Hiérarchie cumulative

Définition 4.1
Pour tout ensemble x, on définit la suite d'ensembles $(x_n)_{n<\omega}$ selon les règles :
- $x_0 = x$
- $x_{n+1} = \cup_{m<n}(x_n)$

*Puis on pose $CT(x) = \cup_{n<\omega}(x_n)$ que l'on appelle la **clôture transitive** de x.*

Proposition 4.2
Pour tout ensemble x, l'ensemble $CT(x)$ est transitif.

Démonstration. Pour tout $y \in CT(x)$ on va montrer $y \subset CT(x)$. Or $y \in CT(x)$ signifie qu'il existe un entier n avec $y \in x_n$. Ainsi $y \in x_n$ et par construction $y \subset x_{n+1}$. Nous avons donc bien $y \subset CT(x)$. □

Axiome 8
***L'axiome de fondation** noté AF dit que tout ensemble non vide E possède un élément x tel que $x \cap E$ est vide.*

Cet axiome se généralise aux classes.

Proposition 4.3
Pour toute classe $\boldsymbol{C}$ non vide il existe $x \in \boldsymbol{C}$ tel que $x \cap \boldsymbol{C} = \varnothing$

Démonstration. Soit une classe $\mathbf{C}$ non vide et $x \in \mathbf{C}$. Si $x \cap \mathbf{C} = \varnothing$, alors la proposition est démontrée. Supposons le contraire, l'ensemble $x \cap \mathbf{C}$ est alors non vide,. De plus, comme $x \subset CT(x)$, on a également que $CT(x) \cap \mathbf{C}$ est non vide. Par l'axiome de fondation il existe donc $y \in CT(x) \cap \mathbf{C}$ tel que $y \cap CT(x) \cap \mathbf{C} = \varnothing$. De plus, comme $CT(x)$ est transitif, on a $y \subset CT(x)$ et alors $y \cap CT(x) = y$. Nous avons donc troué $y \in \mathbf{C}$ avec $y \cap \mathbf{C} = \varnothing$. □

Définition 4.4
Par le principe de définition par récurrence on définit la suite d'ensembles V_α selon les règles :
- $V_0 = \varnothing$,
- $V_{S(\alpha)} = \mathcal{P}(V_\alpha)$,
- $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$ *si α est un ordinal limite.*

Proposition 4.5
Pour tout $\alpha \in \boldsymbol{ON}$, l'ensemble V_α est transitif.

Démonstration. Montrons la transitivité par induction sur α. Si $\alpha = 0$, on a $V_0 = 0$. Or 0 est bien transitif.

Si α est un ordinal successeur, alors $\alpha = S(\beta)$ pour un certain $\beta \in \mathbf{ON}$. Pour tout $x \in V_{S(\beta)}$ on doit montrer $x \subset V_{S(\beta)}$. Or comme $V_{S(\beta)} = \mathcal{P}(V_\beta)$, si

$x \in V_{S(\beta)}$ on a $x \subset V_\beta$. Par hypothèse de récurrence, V_β est transitif, ainsi $V_\beta \subset \mathcal{P}(V_\beta)$. On a alors comme voulu $x \subset V_{S(\beta)}$.

Si α est un ordinal limite, alors $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$. Ainsi pour tout $x \in V_\alpha$, il existe $\beta < \alpha$ tel que $x \in V_\beta$. Par hypothèse de récurrence, on a $x \subset V_\beta$. Ainsi comme $V_\beta \subset V_\alpha$, on trouve comme voulu $x \subset V_\alpha$.

Nous avons fini de démontrer par induction que pour tout $\alpha \in \mathbf{ON}$, l'ensemble V_α est transitif. $\square$

Proposition 4.6
Pour tout $\alpha, \beta \in \boldsymbol{ON}$, si $\alpha < \beta$, alors $V_\alpha \subset V_\beta$.

Démonstration. Pour tout $\alpha \in \mathbf{ON}$, montrons la proposition par induction sur β. Si $\beta = 0$, alors $\beta \leq \alpha$, et il n'y a rien à prouver.

Si β est un ordinal successeur, alors $\beta = S(\gamma)$ pour un certain $\gamma \in \mathbf{ON}$. Si $\alpha < \beta$ on a $\alpha \leq \gamma$. Par hypothèse de récurrence on a alors $V_\alpha \subset V_\gamma$. De plus, comme V_γ est un ensemble transitif, on a $V_\gamma \subset \mathcal{P}(V_\gamma)$. Comme $V_\beta = \mathcal{P}(V_\gamma)$, on a bien montré $V_\alpha \subset V_\beta$.

Si β est un ordinal limite, alors $V_\beta = \bigcup_{\gamma\in\beta} V_\gamma$. Si $\alpha < \beta$ on a alors immédiatement $V_\alpha \subset V_\beta$.

Nous avons donc montré la proposition pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$. $\square$

Proposition 4.7
Pour tout ensemble $x \in \bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{ON}} V_\alpha$, le plus petit ordinal α tel que $x \in V_\alpha$, est un ordinal successeur.

Démonstration. Aucun ensemble n'est élément de V_0 qui est vide. Supposons qu'il existe x dont le plus petit ordinal α tel que $x \in V_\alpha$ est un ordinal un ordinal limite. Alors $x \in V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$. Ainsi il existe $\beta \in \alpha$ avec $x \in V_\beta$, d'où une contradiction à la minimalité de α. On a alors prouvé pour tout ensemble x que le plus petit ordinal α tel que $x \in V_\alpha$ n'est ni 0 ni un ordinal limite, c'est alors un ordinal successeur. $\square$

Définition 4.8
*On définit le **rang** d'un ensemble $x \in \bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{ON}} V_\alpha$ par le prédécesseur du plus petit ordinal α tel que $x \in V_\alpha$. On note $rang(x)$ le rang de x.*

Exemple 4.9
Pour tout $\alpha \in \mathbf{ON}$, on a $rang(\alpha) = \alpha$.

Proposition 4.10
Pour tout $x, y \in \bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{ON}} V_\alpha$, si $x \in y$, alors $rang(x) < rang(y)$.

Démonstration. Soit α le rang de y. On a alors $y \in V_{S(\alpha)}$. Comme $V_{S(\alpha)} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, on a $y \subset V_\alpha$. Comme $x \in y$, on a alors $x \in V_\alpha$. Il en résulte que le rang de x est inférieur à α, d'où la proposition. $\square$

On peut montrer que l'axiome de fondation est un axiome indépendant des autres axiomes de ZF. Les définitions et propiétés des nombres ordinaux n'ont jamais nécessité l'axiome de fondation dans leurs démonstrations. Nous pouvons alors formuler la proposition suivante :

Proposition 4.11
L'axiome de fondation est équivalent à la formule :

$$\boldsymbol{V} = \bigcup_{\alpha \in \boldsymbol{ON}} V_\alpha,$$

où $\boldsymbol{V}$ *dénote la classe de tous les ensembles.*

Démonstration. Montrons que AF implique que $\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha$.

Posons $\mathbf{C}$ la classe des ensembles qui ne sont pas éléments de $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha$. Supposons par l'absurde que $\mathbf{C}$ est non vide. Soit alors $x \in \mathbf{C}$ tel que $x \cap \mathbf{C} = \varnothing$. Ainsi pour tout $y \in x$ on a $y \in \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha$. Soit $f : x \to \mathbf{ON}$ la fonction qui à tout $y \in x$ associe :

$$f(y) = S(rang(y)).$$

Ainsi pour tout $y \in x$ on a $y \in V_{f(y)}$. Par l'axiome de remplacement, nous pouvons construire, grâce à la fonction f, l'ensemble d'ordinaux $A = \{f(y) : y \in x\}$. Soit alors l'ordinal $\gamma = \cup A$. Comme pour tout $y \in x$ on a $f(y) \leq \gamma$, il s'ensuit $V_{f(y)} \subset V_\gamma$ et ainsi $y \in V_\gamma$. Il résulte $x \subset V_\gamma$ et donc $x \in V_{\gamma+1}$, d'où une contradiction.

Nous avons donc fini de montrer qu'en utilisant l'axiome de fondation, tout ensemble est contenu dans $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha$. Il reste à montrer que si l'on suppose, $\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha$, alors il en découle l'axiome de fondation.

Pour tout $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha$, il nous faut donc montrer qu'il existe $y \in x$ avec $y \cap x = \varnothing$. Soit la classe d'ordinaux

$$E = \{\alpha \in \mathbf{ON} : \text{ il existe } y \in x \text{ avec } rang(y) = \alpha\}.$$

Prenons α minimal dant E. Il existe donc $y \in x$ tel que $rang(y) = \alpha$. Par la minimalité de α, pour tout $z \in x$, on a $rang(y) \leq rang(z)$. Supposons par l'absurde que $x \cap y$ soit non vide. Alors il existe $z \in x \cap y$. Comme $z \in x$ on a $rang(y) \leq rang(z)$. Cependant, comme $z \in y$, on a par la proposition 4.10 $rang(z) < rang(y)$, d'où une contradiction.

Nous avons donc montré que pour tout ensemble $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha$ il existe $y \in x$ avec $y \cap x = \varnothing$. Ainsi en supposant $\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha$, on a montré l'axiome de fondation. □

5 Nombres cardinaux

5.1 Introduction

Définition 5.1
*Soit un ordre strict (E, R). Une **chaine** est un sous-ensemble $F \subset E$ tel que (F, R) est totalement ordonné. Un ordre strict (E, R) est dit **inductif** si toute chaine $F \subset E$ admet un élément maximal.*

Lemme 5.2 (Zorn)
Tout ordre strict (E, R) inductif admet un élément maximal.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence classique de l'axiome du choix. $\square$

Théorème 5.3 (Zermelo)
Pour tout ensemble E il existe un ensemble R tel que (E, R) soit un bon ordre.

Démonstration. Soit E un ensemble. On dit que (F, S) est un bon ordre partiel si c'est un bon ordre et $F \subset E$. Soit $y = \{(F, S) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E \times E) : (F, S)$ est un bon ordre partiel$\}$. Soit de plus la relation suivante sur les bons ordres partiels :

$$(F, S) < (G, T) \text{ si et seulement si } F \subset G \text{ et } S \subset T$$

On peut facilement montrer que y est un ensemble ordonné inductif selon la relation $<$. Il s'ensuit selon le lemme de Zorn que y possède un élément maximal (F, S). On sait que (F, S) est un bon ordre partiel. Montrons que $F = E$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $p \in E \setminus F$. Remarquons que $(F', S') = (F \cup \{p\}, S \cup \{p\} \times F)$ est un bon ordre partiel. Ainsi $(F, S) < (F', S')$ d'où une contradiction à la maximalité de (F, S). Nous avons fini de montrer que (E, S) est un bon ordre. $\square$

On sait que tout ensemble bien ordonné est isomorphe à un unique ordinal. Le résultat précédent nous permet alors de mettre n'importe quel ensemble en bijection avec un ordinal.

Cependant, rien ne nous assure qu'il n'existe qu'un unique bon ordre à donner à un ensemble. En effet, on peut considérer l'ordre suivant sur ω :

$$0 < 1 < 3 < 5 < 7 < ... < 2 < 2 \cdot 3 < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 7 < ... < 2^2 < 2^2 \cdot 3 < ...$$

où chaque nombre n est écrit de façon unique $n = 2^r \cdot q$, avec q impair. L'ordre considéré est alors l'ordre lexicographique sur r et q. C'est un bon ordre isomorphe à ω^2. Nous pouvons donc donner deux bons ordres au même ensemble ω, il nous faut donc une notion suplémentaire pour modéliser la taille d'un ensemble.

Définition 5.4
Le ***cardinal*** *d'un ensemble E, noté $|E|$, est le plus petit ordinal en bijection avec E.*

La notion de bijection est une notion intuitive pour comparer la taille de deux ensembles. On pourrait se dire : "Si j'arrive à mettre deux à deux chaque élément de mes deux ensembles, alors ils ont le même nombre d'éléments".

Définition 5.5
On appelle ***cardinal*** *ou* ***nombre cardinal*** *tout ordinal α tel que $|\alpha| = \alpha$. On appelle* ***Card*** *la classe des nombres cardinaux.*

Exemple 5.6
Chaque nombre naturel n est un nombre cardinal, il ne peut être mis en bijection avec aucun autre nombre naturel plus petit. Le nombre ω est un cardinal, car c'est le plus petit ordinal à posséder une infinité d'éléments, il ne peut être mis en bijection avec un nombre naturel plus petit.

Proposition 5.7
Soit x, y des ensembles non vides. Il existe une injection $f : x \to y$ si et seulement si il existe une surjection $g : y \to x$.

Démonstration. Soit une injection $f : x \to y$, cherchons à construire une surjection $g : y \to x$. Soit $s_0 \in x$, pour tout $t \in y$ posons :

$$g(t) = \begin{cases} s & \text{si s est l'unique élément de } x \text{ tel que } f(s) = t \\ s_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Clairement, g est une surjection, car pour tout $s \in x$, on a $g(f(s)) = s$ et ainsi $g \circ f = id$.

Soit $g : y \to x$ une surjection, cherchons alors à construire une injection $f : x \to y$. Soit r un ensemble tel que (y, r) soit un bon ordre. Pour tout $s \in x$ posons :

$$f(s) = \text{l'élément minimal selon } r \text{ de } \{t \in y : g(t) = s\}$$

On a que f est une injection, car $f(g(t)) = t$ et ainsi $f \circ g = id$. $\square$

Proposition 5.8
Soit x, y des ensembles. On a alors $|x| \leq |y|$ si et seulement si il existe une injection $f : x \to y$.

Démonstration. Soit $g : x \to |x|$ et $h : y \to |y|$ des bijections.

Supposons qu'on aie $|x| \leq |y|$, on va trouver une injection de x dans y. On a $|x| \subset |y|$ et l'identité $i : |x| \to |y|$ est une injection. Il s'ensuit que la composition de fonctions $g \circ i \circ h^{-1}$ est une injection de x dans y.

Dans l'autre sens, supposons qu'il existe une injection $f : x \to y$. On va montrer que $|x| \leq |y|$. La composition de fonctions $k = g^{-1} \circ f \circ h$ est une injection de $|x|$ dans $|y|$. Posons

$$E = \{k(\alpha) : \alpha \in |x|\}.$$

On a alors que E est un ensemble de nombres ordinaux, donc $(E, \in)$ est un bon ordre. Posons β l'ordinal isomorphe à $(E, \in)$ et $l : \beta \to E$ un isomorphisme. Ainsi posé, l est un homomorphisme entre β et $|y|$ car $E \subset |y|$. Il en résulte par la proposition 3.25 que $\beta \subset |y|$. Comme β est en bijection avec E et E est en bijection avec $|x|$, on a que β est en bijection avec le cardinal $|x|$. Il s'ensuit que $|\beta| = |x|$. Par définition du cardinal, on a également $|\beta| \subset \beta$. Nous avons donc montré la chaîne d'inclusions suivante

$$|x| = |\beta| \subset \beta \subset |y|.$$

Ainsi nous avons fini de montrer $|x| \subset |y|$ □

Proposition 5.9
Soit x, y des ensembles. On a alors $|x| = |y|$ si et seulement si il existe une bijection $f : x \to y$.

Démonstration. Supposons $|x| = |y|$, on a alors deux bijections $f : x \to |x|$ et $g : y \to |y|$. Alors $f \circ g^{-1}$ est une bijection de x vers y.

Supposons qu'il existe une bijection $f : x \to y$. Ainsi f est une injection de x vers y et f^{-1} est une injection de y vers x. D'après le théorème précédent, nous avons donc $|x| \leq |y|$ et $|y| \leq |x|$. Il en résulte $|x| = |y|$. □

Théorème 5.10 (Cantor-Schröder-Bernstein)
Soit x, y des ensembles. S'il existe des injections $f : x \to y$ et $g : y \to x$, alors il existe une bijection $h : x \to y$.

Démonstration. Selon la proposition 5.9, on peut reformuler les hypothèses par $|x| \leq |y|$ et $|y| \leq |x|$. Il en résulte que $|x| = |y|$. Ainsi nous avons montré que x et y sont en bijection. □

Lemme 5.11
*Soit $\alpha, \beta \in$ **ON**. Si $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$, alors $|\alpha| = |\beta|$.*

Démonstration. Comme $\beta \subset \alpha$, l'inclusion forme une injection de β vers α. On a également une injection de α vers β en composant une bijection $f : \alpha \to |\alpha|$ avec l'inclusion de $|\alpha| \subset \beta$. Donc par le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein on a une bijection entre α et β. On en déduit donc $|\alpha| = |\beta|$. □

Théorème 5.12 (Cantor)
Pour tout ensemble x, on a $|\mathcal{P}(x)| > |x|$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un ensemble x et une bijection $f : x \to \mathcal{P}(x)$. Posons $E = \{s \in x : s \notin f(s)\}$. Comme f est une surjection, $E = f(t)$ pour un certain $t \in x$. Si l'on suppose $t \in f(t) = E$ alors par construction de E, on a $t \notin f(t)$. De même si l'on suppose $t \notin f(t)$ alors forcément $t \in E = f(t)$. D'où une contradiction, on a montré que f n'est pas une bijection. □

Ainsi nous avons montré que pour tout cardinal, il existe un cardinal supérieur.

Définition 5.13
*Pour $\alpha \in$ **ON** on note α^+ le plus petit cardinal supérieur à α.*

Définition 5.14
On définit par récurrence la suite suivante :
- $\omega_0 = \omega$
- $\omega_{S(\alpha)} = \omega_\alpha^+$
- $\omega_\alpha = \sup_{\gamma \in \alpha} \omega_\gamma$ *si α est un ordinal limite.*

On note parfois $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$.

Proposition 5.15
*Pour tout $\alpha \in$ **ON**, on a que ω_α est un cardinal.*

Démonstration. Pour tout $\alpha \in$ **ON**, prouvons par induction que ω_α est un cardinal. On a bien que $\omega_0 = \omega$ est un cardinal. Si $\alpha = S(\beta)$ est un ordinal successeur, alors par définition $\omega_\alpha = \omega_\beta^+$ est un cardinal. Si α est un ordinal limite, alors $\omega_\alpha = \bigcup_{\gamma \in \alpha} \omega_\gamma$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas un cardinal. Alors $|\omega_\alpha| \in \omega_\alpha$. Ainsi $|\omega_\alpha| \in \omega_\gamma$ pour un certain $\gamma \in \alpha$. Nous avons donc $|\omega_\alpha| \leq \omega_\gamma \leq \omega_\alpha$ et par le lemme 5.11 on a $|\omega_\alpha| = |\omega_\gamma|$. Par hypothèse de récurrence, $|\omega_\gamma| = \omega_\gamma$, ainsi on a prouvé $|\omega_\alpha| = \omega_\gamma$, ce qui contredit $|\omega_\alpha| \in \omega_\gamma$. Nous avons alors fini de prouver que ω_α est un cardinal pour tout $\alpha \in$ **ON**. □

5.2 Arithméthique cardinale

Définition 5.16 (Addition)
*Pour tout $\kappa, \lambda \in$ **Card**, on définit l'addition sur les nombres cardinaux par $\kappa \oplus \lambda = |\kappa + \lambda|$.*

Proposition 5.17
Soit E, F des ensembles tels que $E \cap F = \varnothing$. Alors $|E| \oplus |F| = |E \cup F|$.

Démonstration. On a vu dans la chapitre sur l'arithmétique ordinale que $|E|+|F|$ est isomorphe à $((\{0\} \times |E|) \cup (\{1\} \times |F|), <_{lex})$. Il reste à montrer que $(\{0\}\times|E|)\cup(\{1\}\times|F|)$ est en bijection avec $E \cup F$. Soit $f : E \to |E|$ et $g : F \to |F|$ des bijection. Définissons alors $h : E \cup F \to (\{0\}\times|E|)\cup(\{1\}\times|F|)$ par :

$$\text{pour tout } x \in E \cup F, \text{posons } h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ g(x) & \text{si } x \in F. \end{cases}$$

On vérifie facilement que c'est une bijection, d'où le théorème. □

Proposition 5.18 (Propriétés de l'addition)
*Pour tout $\kappa, \lambda, \mu \in$ **Card**, on a :*

- *$\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$ (commutativité),*
- *$\kappa \oplus (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \oplus \lambda) \oplus \mu$ (associativité),*
- *si $\kappa \leq \lambda$, alors $\mu \oplus \kappa \leq \mu \oplus \lambda$.*

Démonstration. Soit $E = \{0\} \times \kappa$, $F = \{1\} \times \lambda$ et $G = \{2\} \times \mu$. Alors $E \cap F = E \cap G = F \cap G = \varnothing$ et $|E| = \kappa$, $|F| = \lambda$ ainsi que $|G| = \mu$.

Pour prouver la commutativité, il suffit de voir

$$\kappa \oplus \lambda = |E \cup F| = |F \cup E| = \lambda \oplus \kappa.$$

Pour l'associativité

$$\begin{aligned} \kappa \oplus (\lambda \oplus \mu) &= |E| \oplus |F \cup G| \\ &= |E \cup (F \cup G)| \\ &= |(E \cup F) \cup G| \\ &= |E \cup F| \oplus |G| \\ &= (\kappa \oplus \lambda) \oplus \mu. \end{aligned}$$

Pour la troisième assertion, on a une injection $f : E \to F$. On "prolonge" f en l'injection $g : G \cup E \to G \cup F$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi on peut trouver une injection de $|G \cup E|$ à $|G \cup F|$, on a donc $\mu \oplus \kappa \leq \mu \oplus \lambda$. □

Définition 5.19 (Multiplication)
*Pour tout $\kappa, \lambda \in$ **Card**, on définit la multiplication sur les nombres cardinaux par $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \cdot \lambda|$.*

Proposition 5.20
Soit E, F des ensembles. Alors $|E| \otimes |F| = |E \times F|$.

Démonstration. On a vu dans la chapitre sur l'arithmétique ordinale que $|E| \cdot |F|$ est isomorphe à $(|E| \times |F|, <_{lex})$. Il s'ensuit que $|E| \otimes |F| = ||E| \cdot |F|| = ||E| \times |F||$. Il nous reste à trouver une bijection entre $|E| \times |F|$ et $E \times F$ pour terminer la preuve. Soit $f : |E| \to E$ et $g : |F| \to F$ des bijection. Définissons alors $h : |E| \times |F| \to E \times F$ pour tout $(\alpha, \beta) \in |E| \times |F|$ par :

$$h(\alpha, \beta) = (f(\alpha), g(\beta)).$$

On vérifie facilement que c'est une bijection, d'où le théorème. □

Comme tout nombre naturel est un cardinal, alors pour tout $n, m \in \omega$ on a $n \oplus m = |n + m| = n + m$ et $n \otimes m = |n \cdot m| = n \cdot m$.

Proposition 5.21
Pour tout cardinal infini κ, on a $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.

Démonstration. Montrons la proposition par induction sur κ. On a clairement que $\kappa \leq \kappa \otimes \kappa$ selon l'injection $f : \kappa \to \kappa \times \kappa$ qui à $\alpha \in \kappa$ associe $f(\alpha) = (\alpha, 0)$. Il reste donc à montrer que $\kappa \otimes \kappa \leq \kappa$. Supposons alors que pour tout cardinal infini $\lambda < \kappa$, on a $\lambda \otimes \lambda = \lambda$. Montrons que pour tout $(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa$, on a $\alpha + \beta < \kappa$. Posons $\lambda = max(|\alpha|, |\beta|)$. Nous avons donc $\lambda < \kappa$, et ainsi $\lambda = \lambda \cdot \lambda$. Alors

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| \oplus |\beta| \leq \lambda \oplus \lambda = 2 \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda < \kappa.$$

Il en découle que $\alpha + \beta < \kappa$, comme voulu.

Considérons l'ordre $(E, <_E)$ où pour tout $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in \kappa \times \kappa$ on définit $<_E$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) <_E (\alpha', \beta') \text{ si et seulement si } & (\alpha + \beta) < (\alpha' + \beta') \\ & \vee [(\alpha + \beta) = (\alpha' + \beta') \wedge \alpha < \alpha'] \\ & \vee [(\alpha + \beta) = (\alpha' + \beta') \wedge \alpha = \alpha' \wedge \beta < \beta'].\end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que c'est un bon ordre.

Soit maintenant γ l'ordinal isomorphe au bon ordre $(E, <_E)$. On a $|\gamma| = |E| = \kappa \otimes \kappa$. On sait alors $\kappa \leq \gamma$ Nous voulons montrer $\kappa = \gamma$.

Par l'absurde, supposons que $\kappa < \gamma$. Il existe alors $(\alpha_0, \beta_0) \in E$ tel que κ soit isomorphe à l'ensemble des prédécesseurs $(E_{(\alpha_0,\beta_0)}, <_E)$. Posons $\lambda_0 = \alpha_0 + \beta_0$. Pour tout $(\alpha, \beta) \in E_{(\alpha_0,\beta_0)}$ on a $\alpha + \beta \leq \lambda_0$ ainsi que $\alpha \leq \lambda_0$ et $\beta \leq \lambda_0$. Il s'ensuit que

$$E_{(\alpha_0,\beta_0)} \subset (\lambda_0 + 1) \times (\lambda_0 + 1).$$

Comme $\lambda_0 < \kappa$ et que κ n'est pas un ordinal successeur, alors $\lambda_0 + 1 < \kappa$. D'où par hypothèse de récurrence,

$$|E_{(\alpha_0,\beta_0)}| \leq |(\lambda_0 + 1)| \otimes |(\lambda_0 + 1)| = |(\lambda_0 + 1)| < \kappa.$$

Or, comme κ est isomorphe à $E_{(\alpha_0,\beta_0)}$, nous avons trouvé une contradiction, $\kappa < \kappa$.

Il en résulte que $\kappa = \gamma$, et ainsi $\kappa = |\kappa| = |\gamma| = \kappa \otimes \kappa$, d'où la proposition. □

Corollaire 5.22
Pour tout cardinal infini λ et κ, on a $\lambda \oplus \kappa = \lambda \otimes \kappa = max(\lambda, \kappa)$

Démonstration. Sans restreindre la généralité supposons $\lambda \leq \kappa$. Ainsi pour la multiplication, on a

$$\lambda \otimes \kappa \leq \kappa \otimes \kappa = \kappa.$$

Comme on a également $\kappa = \kappa \otimes 1 \leq \lambda \otimes \kappa$, on obtient l'égalité $\lambda \otimes \kappa = \kappa$. De même pour l'addition, on a

$$\lambda \oplus \kappa \leq \kappa \oplus \kappa = \kappa \otimes 2 \leq \kappa \otimes \kappa = \kappa.$$

Ainsi comme $\kappa = 0 \oplus \kappa \leq \lambda \oplus \kappa$, on obtient l'égalité $\lambda \oplus \kappa = \kappa$. □

Définition 5.23
Soit E, F des ensembles. On écrit ${}^E F = \{f : f$ est une fonction de E vers $F\}$. Comme ${}^E F \subset \mathcal{P}(E \times F)$ on a que ${}^E F$ est bien un ensemble selon l'axiome de compréhension.

Définition 5.24 (Puissance)
Soit κ, λ des cardinaux. On définit κ^λ par :

$$\kappa^\lambda = |{}^\lambda \kappa|.$$

Attention à ne pas confondre la puissance ordinale et la puissance cardinale qui partagent la même notation. A partir de ce chapitre, nous ne parlerons plus que de puissance cardinale.

Proposition 5.25
Soit E, F des ensembles. alors $|{}^F E| = |E|^{|F|}$.

Démonstration. Soit les bijections $f : E \to |E|$ et $g : F \to |F|$. Il nous faut trouver une bijection

$$h : {}^F E \to {}^{|F|}|E|.$$

Pour tout $x \in {}^F E$ on pose $h(x) = f \circ x \circ g^{-1}$. Ainsi on a bien $h(x) \in {}^{|F|}|E|$. Il est facile de voir que h est une bijection. Il en résulte alors que $|{}^F E| = {}^{|F|}|E|$. □

Proposition 5.26
Soit κ, λ, μ des ordinaux. On a :

$$\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu.$$

Démonstration. Soit $A = \kappa$, $B = \{0\} \times \lambda$ et $C = \{1\} \times \mu$. On a alors $B \cap C = \varnothing$. Ainsi $\lambda \oplus \mu = |B \cup C|$. Pour prouver cette proposition, nous allons trouver une bijection

$$h : {}^{B \cup C}A \to {}^B A \times {}^C A.$$

Pour tout $f \in {}^{B \cup C}A$ posons $h(f) = (f_1, f_2)$. On défini $f_1 : B \to A$ par $f_1(x) = f(x)$ et $f_2 : C \to A$ par $f_2(x) = f(x)$. On voit facilement que h est bien une bijection, d'où $|{}^{B \cup C}A| = |{}^B A| \otimes |{}^C A|$. Par la proposition 5.25 on peut reformuler ce résultat par $\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu$. □

Proposition 5.27
Soit κ, λ, μ des ordinaux. On a :

$$(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \otimes \mu}.$$

Démonstration. Comme $\lambda \otimes \mu = |\lambda \times \mu|$ on a alors $\kappa^{\lambda \otimes \mu} = |{}^{\lambda \times \mu}\kappa|$. Il nous faut trouver une bijection

$$h : {}^\mu({}^\lambda \kappa) \to {}^{\lambda \times \mu}\kappa.$$

Pour tout $f \in {}^\mu({}^\lambda \kappa)$ définissons $h(f)$ pour tout $x \in \lambda$ et $y \in \mu$ par

$$h(f)(x, y) = (f(y))(x).$$

Ainsi on a bien $h(f) \in {}^{\lambda \times \mu}\kappa$. Il reste à montrer que h est une bijection.

Montrons l'injectivité. Soit $f, f' \in {}^\mu({}^\lambda \kappa)$ tels que $h(f) = h(f')$, on doit montrer $f = f'$. Pour tout $x \in \lambda$ et $y \in \mu$ on a $h(f)(x, y) = h(f')(x, y)$ Ainsi pour tout $y \in \mu$, pour tout $x \in \lambda$ on a $(f(y))(x) = (f'(y))(x)$. On en tire que pour tout $y \in \mu$, on a $f(y) = f'(y)$. On en tire à nouveau que $f = f'$, d'où l'injectivité de h.

Montrons la surjectivité de h. Pour tout $g \in {}^{\lambda\times\mu}\kappa$ il nous faut trouver $f \in {}^{\mu}({}^{\lambda}\kappa)$ tel que $g = h(f)$. Posons f tel que pour tout $y \in \mu$, on a $f(y) \in {}^{\lambda}\kappa$, où l'on défini $f(y)$ tel que pour tout $x \in \lambda$ on a $f(y)(x) = g(x, y)$. Ainsi défini, pour tout $x \in \lambda$ et $y \in \mu$ on a $h(f)(x, y) = g(x, y)$ et donc $h(f) = g$. Nous avons fini de démontrer la surjectivité de h. La proposition est démontrée. $\square$

6 Conclusion

Dans ce travail nous avons vu la construction des nombres ordinaux et cardinaux. Puis nous leur avons associé des arithmétiques afin de manipuler ces nombres. L'axiome de l'infini nous a permis de mettre en évidence des ordinaux plus grands que tout nombre naturel. L'axiome du choix a rendu possible la définition du cardinal d'un ensemble. Les cardinaux nous donnent alors une mesure de la "grandeur" de tout ensemble. De même, l'axiome de fondation nous permet de définir le rang d'un ensemble. Le rang d'un ensemble nous donne une idée de sa "profondeur". Ces deux "hiérarchies" que l'on donne aux ensembles, à savoir le cardinal et le rang, nous permettent d'avoir une compréhension plus profonde du concept d'ensemble.

Références

[1] Keith Delvin. *The Joy of Sets*. Springer, 1993.

[2] Thomas Jech. *Set Theory*. Springer, 2002.

[3] Kenneth Kunen. *Set Theory*. North-Holland publishing company, 1980.